

Libris.RO

Respect pentru oameni și știință

GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER

**MEMORATOR ȘI ÎNDRUMAR
DE MATEMATICĂ
G E O M E T R I E
PENTRU GIMNAZIU**

EDITURA HYPERION

Resurse bibliografice și cărți	3
1. Punctul, dreapta, segmentul de dreaptă, semidreapta	3
1.1 Punctul	3
1.2 Dreapta	3
1.3 Segmentul de dreaptă	5
1.4 Semidreapta	8
2. Unghiul	9
2.1 Elementele și măsura unui unghi	9
2.2 Clasificarea unghiurilor	10
2.3 Congruența unghiurilor	10
2.4 Unghiuri adiacente; bisectoarea unui unghi	10
2.5 Unghiuri opuse la vârf; congruența lor; unghiuri formate în jurul unui punct; suma măsurilor lor	12
3. Congruența triunghiurilor	14
3.1 Triunghi: definiție, elemente; clasificarea triunghiurilor; perimetrul triunghiului	14
3.2 Construcția triunghiurilor	16
3.3 Congruența triunghiului oarecare	17
4. Perpendicularitate	19
4.1 Drepte perpendiculare; oblice; distanța de la un punct la o dreaptă	19
4.2 Înălțimea în triunghi; concurența înălțimilor	19
4.3 Criterii de congruență ale triunghiurilor dreptunghice: IC, IU, CC, CU	21
4.4 Mediatoarea unui segment; construcția mediatoarei unui segment; concurența mediatoarelor laturilor unui triunghi; simetria față de o dreaptă	22
5. Paralelism	23
5.1 Drepte paralele; construirea dreptelor paralele; axioma paralelelor	23

	5.2 Criterii de paralelism (unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă)	24
6.	Proprietăți ale triunghiurilor	27
	6.1 Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi; unghi exterior unui triunghi; teorema unghiului exterior	27
	6.2 Mediana în triunghi; concurența medianelor unui triunghi	28
	6.3 Proprietăți ale triunghiului isoscel	29
	6.4 Proprietăți ale triunghiului echilateral	31
	6.5 Proprietăți ale triunghiului dreptunghic	32
7	Patrulater	33
	7.1 Patrulaterul convex, suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex	33
	7.2 Paralelogram; proprietăți	34
	7.3 Paralelograme particulare; dreptunghi, romb și pătrat; proprietăți	36
	7.4 Trapez, clasificare; trapez isoscel, proprietăți ..	40
	7.5 Aree; calculul ariilor unor suprafețe	42
	7.6 Aplicații	45
8	Asemănarea triunghiurilor	46
	8.1 Raportul a două segmente, segmente proporționale	46
	8.2 Teorema paralelelor echidistante. Teorema lui Thales	46
	8.3 Linia mijlocie în triunghi. Proprietăți. Centrul de greutate al unui triunghi	47
	8.4 Linia mijlocie în trapez; proprietăți	48
	8.5 Triunghiuri asemenea; teorema fundamentală a asemănării	48
	8.6 Aplicații	49
9	Relații metrice în triunghiul dreptunghic	51
	9.1 Proiecții ortogonale pe o dreaptă	51

9.2	Teoreme importante, teorema înălțimii, teorema catetei, teorema lui Pitagora	51
9.3	Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic; sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta unui unghi	52
9.4	Rezolvarea triunghiului dreptunghic	53
9.5	Aplicații	54
10	Cercul	55
10.1	Cercul; definiție, elemente	55
10.2	Unghi la centru; măsura arcelor; arce congruente	56
10.3	Coarde și arce în cerc	56
10.4	Unghi înscris în cerc; triunghi înscris în cerc	57
10.5	Patrulater înscris în cerc; patrulater inscriptibil	57
10.6	Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc; tangenta dintr-un punct exterior la un cerc; triunghi circumscris unui cerc; patrulater circumscris unui cerc	58
10.7	Poligoane regulate; calculul elementelor în triunghiul echilateral, pătrat, hexagon regulat	59
10.8	Aplicații	60
	Geometrie în spațiu	61
1.	Relații între puncte, drepte și plane	61
1.1	Puncte, drepte, plane; determinarea drepte, determinarea planului	61
1.2	Unghiul a două drepte în spațiu, drepte perpendiculare	61
1.3	Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan; dreaptă perpendiculară pe un plan; distanța de la un punct la un plan	62
1.4	Pozițiile relative a două plane; plane paralele; distanța dintre două plane paralele	63
1.5	Aplicații	63

2.	Proiecții ortogonale pe un plan	66
2.1	Proiecții de puncte, segmente și de drepte pe un plan; unghiul unei drepte cu un plan; lungimea proiecției unui segment pe un plan	66
2.2	Teorema celor trei perpendiculare	68
2.3	Unghi diedru; unghiul dintre două plane; plane perpendiculare	69
3.	Corpuri geometrice	70
3.1	Prisma regulată	70
3.2	Piramida regulată	73
3.3	Trunchiul de piramidă regulată	76
3.4	Corpuri rotunde	78
3.4.1	Cilindrul circular drept	78
3.4.2	Conul circular drept	80
3.4.3	Trunchiul de con circular drept	81
3.4.4	Sfera	82

Tiparul executat la
EDITURA HYPERION
CRAIOVA
Str. Împăratul Traian Nr. 30

1. Punctul, dreapta, segmentul de dreaptă, semidreapta

1.1 Punctul

1. **Punctul** reprezintă o noțiune fundamentală a geometriei, se notează cu litere mari de tipar: $A, B, C, \dots$ și se reprezintă: $\bullet A$ sau $\bullet B$ sau $\bullet C, \dots$.

Fiind date punctele A și B , avem una din situațiile:

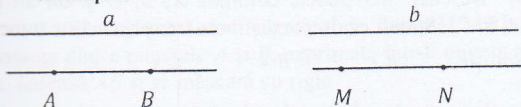
- $A = B$ - punctele sunt identice;
- $A \neq B$ - punctele sunt diferite (distincte);

O mulțime de puncte determină o **figură geometrică**.

1.2 Dreapta

1. O **dreaptă** se poate desena cu ajutorul unei rigle și este nemărginită. Ea se poate nota cu litere mici $a, b, c, \dots$ sau prin citirea a două puncte de pe ea $AB, BC, \dots$.

Exemple:



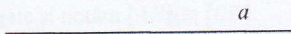
– Fiind dată dreapta a și punctul A , atunci avem una din situațiile:

- punctul A aparține dreptei a și scriem $a \in A$;



- punctul A nu aparține dreptei a și scriem $a \notin A$.

$\bullet A$



Trei puncte care se găsesc pe aceeași dreaptă se numesc

puncte coliniare.

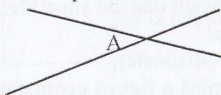
A B C

Respect pentru oameni și cărți

— Fiind date două drepte a și b , notăm $a \cap b$ mulțimea punctelor comune dreptelor a și b .

— Dacă $a \cap b = \emptyset$, atunci dreptele a și b nu au nici un punct comun și se numesc **drepte paralele** și se notează $a \parallel b$.

— Dacă $a \cap b = \{A\}$, atunci dreptele a și b au un punct comun și se numesc **drepte concurente**.



— Dacă $a \cap b$ are cel puțin două puncte, atunci dreptele a și b **coincid** și scriem $a = b$.

a A B b

2. Aplicații

a) Desenați trei puncte coliniare A, B, C și un alt punct $M \notin \{A, B, C\}$. Stabili ce drepte distincte trec prin aceste puncte.

Soluție. A • B • C •

M •

Prin aceste puncte trec dreptele distincte: AB, AM, BM, CM .

b) Se consideră punctele A, B, C, D astfel încât dreptele AB și CD să fie paralele. Să se determine dreptele determinate de aceste puncte.

Soluție. A B

C D

Dreptele sunt: AB, CD, AC, BD, AD și BC .

1.3 Segmentul de dreaptă

1. **Segmentul de dreaptă** reprezintă porțiunea dintr-o dreaptă cuprinsă între două puncte A și B ale drepteii, numite extremitățile segmentului.

Segmentul se notează:

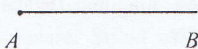
$[AB]$ - caz în care conține toate punctele de pe dreaptă cuprinse între A și B , inclusiv A și B ;

(AB) - caz în care conține toate punctele de pe dreaptă cuprinse între A și B , fără să conțină punctele A și B ;

$[AB)$ - caz în care conține toate punctele de pe dreaptă cuprinse între A și B , inclusiv punctul A , și nu conține punctul B ;

$(AB]$ - caz în care conține toate punctele de pe dreaptă cuprinse între A și B , inclusiv punctul B și nu conține punctul A .

Exemple.



Segmentul $[AA]$ se numește segmentul **nul**.

2. **Lungimea** unui segment de dreaptă $[AB]$ reprezintă distanța dintre punctele A și B , exprimată într-o unitate de măsură, se notează AB și se măsoară cu rigla.

3. **Unitatea principală** pentru măsurarea lungimii este metrul, care se va nota m.

Multiplii metrului sunt: dam = 10m, hm=100m, km=1000m.

Submultiplii metrului sunt: dm, cm, mm și avem :

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm} = 100 \text{ cm} = 1000 \text{ mm}.$$

Segmentul de dreaptă se poate construi cu ajutorul riglei.

4. Două segmente $[AB]$ și $[CD]$ sunt **congruente**, dacă au lungimi egale și notăm $[AB] \equiv [CD]$.

Relația de congruență a segmentelor are următoarele proprietăți și este atunci **relație de echivalență**:

- a) este reflexivă: $[AB] \equiv [AB]$;
- b) este simetrică: dacă $[AB] \equiv [CD]$, atunci $[CD] \equiv [AB]$;
- c) este tranzitivă: dacă $[AB] \equiv [CD]$ și $[CD] \equiv [EF]$, atunci $[AB] \equiv [EF]$.

Mijlocul unui segment $[AB]$ este punctul M , care împarte segmentul $[AB]$ în două segmente congruente ($[AM] \equiv [MB]$).

5. Fiind date segmentele $[AB]$ și $[CD]$, numim **segmentul sumă** al celor două segmente, segmentul $[MN]$, care are lungimea egală cu suma lungimilor celor două segmente.

Exemplu. Fiind date segmentele $[AB]$ și $[CD]$, $AB = a$ și $CD = b$, atunci $[AB] + [CD] = [MN]$, unde $MN = a + b$.

6. Fiind date segmentele $[AB]$ și $[CD]$, $AB > CD$, numim **segmentul diferență** al celor două segmente, segmentul $[MN]$, care are lungimea egală cu diferența lungimilor celor două segmente.

Exemplu. Fiind date segmentele $[AB]$ și $[CD]$, $AB = a$ și $CD = b$, $a > b$, atunci $[AB] - [CD] = [MN]$, unde $MN = a - b$.

7. Fiind date segmentele $[AB]$ și $[CD]$, vom construi **segmentul sumă** al celor două segmente astfel: pe dreapta suport a segmentului $[AB]$ (de exemplu), în prelungirea lui $[AB]$ construim un segment $[BE]$, astfel încât $BE = CD$. Atunci segmentul sumă este segmentul $[AE]$, deoarece $AE = AB + BE = AB + CD$.

8. Fiind date segmentele $[AB]$ și $[CD]$, $AB > CD$, vom construi **segmentul diferență** al celor două segmente $[AB] - [CD]$ astfel: pe dreapta suport a segmentului $[AB]$ se ia segmentul $[AE]$, astfel încât $AE = CD$. Atunci segmentul diferență este segmentul $[EB]$, deoarece $EB = AB - CD$.

9. Aplicații

a) Desenați două segmente de dreaptă distincte și care să aibă cel puțin două puncte comune.

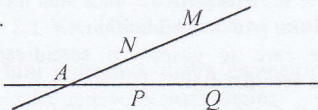
Soluție.



Segmentele $[AB]$ și $[AC]$ au ca puncte comune toate punctele segmentului $[AB]$, deci cel puțin două.

b) Desenați două drepte a și b , care se intersectează în punctul A . Luați punctele distincte $M, N \in a$ și $P, Q \in b$, astfel încât $A \notin \{M, N\}$ și $A \notin \{P, Q\}$. Stabiliți toate segmentele de dreaptă determinate de punctele M, N, P, Q .

Soluție.



Segmentele de dreaptă determinate de punctele M, N, P, Q sunt: $[MN]$, $[MP]$, $[MQ]$, $[NP]$, $[NQ]$, $[PQ]$.

c) Fie A, B, C trei puncte coliniare. Știind că $AB = a$ și $BC = b$, să se calculeze AC . Discuție.

Soluție. Dacă $B \in [AC]$, atunci $AC = AB + BC = a + b$.

Dacă $A \in [BC]$, atunci $AC = BC - BA = b - a$.

Dacă $C \in [AB]$, atunci $AC = AB - CB = a - b$.

d) Fie A, B, C trei puncte coliniare în această ordine. Fie M mijlocul lui $[AB]$, N mijlocul lui $[BC]$ și P mijlocul lui $[AC]$. Să se demonstreze relațiile:

$$1) MN = \frac{AC}{2}; \quad 2) MP = \frac{BC}{2}; \quad 3) NP = \frac{AB}{2}.$$

Soluție.

$$MN = BM + BN = \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} = \frac{AB + BC}{2} = \frac{AC}{2}.$$

$$MP = AP - AM = \frac{AC}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{AC - AB}{2} = \frac{BC}{2}.$$

$$NP = PC - NC = \frac{AC}{2} - \frac{BC}{2} = \frac{AC - BC}{2} = \frac{AB}{2}.$$