GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER

MEMORATOR ȘI ÎNDRUMAR DE MATEMATICĂ
G E O M E T R I E
PENTRU GIMNAZIU

EDITURA HYPERION

CUPRINS

Tiparul executat la
EDITURA HYPERION
CRAIOVA
Str. Împăratul Traian Nr. 30

GEOMETRIE PLANĂ

1. Punctul, dreapta, segmentul de dreaptă, semidreapta

1.1 Punctul

1. **Punctul** reprezintă o noțiune fundamentală a geometriei, se notează cu litere mari de tipar: $A, B, C, \cdots$ și se reprezintă: $\bullet\, A$ sau $\bullet\, B$ sau $\bullet\, C$, $\cdots$.

Fiind date punctele A și B, avem una din situațiile:

– $A = B$ - punctele sunt identice;

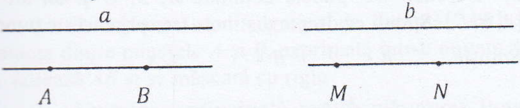
– $A \neq B$ - punctele sunt diferite (distincte);

O mulțime de puncte determină o **figură geometrică**.

1.2 Dreapta

1. O **dreaptă** se poate desena cu ajutorul unei rigle și este nemărginită. Ea se poate nota cu litere mici $a, b, c, \cdots$ sau prin citirea a două puncte de pe ea $AB, BC, \cdots$.

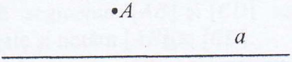
Exemple:



– Fiind dată dreapta a și punctul A, atunci avem una din situațiile:

– punctul A aparține dreptei a și scriem $a \in A$;

– punctul A nu aparține dreptei a și scriem $a \notin A$.

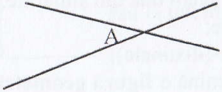


Trei puncte care se găsesc pe aceeași dreaptă se numesc puncte coliniare.

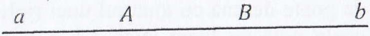
– Fiind date două drepte a și b, notăm $a \cap b$ mulțimea punctelor comune dreptelor a și b.

– Dacă $a \cap b = \emptyset$, atunci dreptele a și b nu au nici un punct comun și se numesc **drepte paralele** și se notează $a||b$.

– Dacă $a \cap b = \{A\}$, atunci dreptele a și b au un punct comun și se numesc **drepte concurente**.



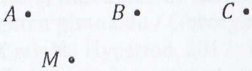
– Dacă $a \cap b$ are cel puțin două puncte, atunci dreptele a și b **coincid** și scriem $a = b$.



2. Aplicații

a) Desenați trei puncte coliniare A, B, C și un alt punct $M \notin \{A, B, C\}$. Stabili ce drepte distincte trec prin aceste puncte.

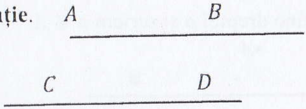
Soluție.



Prin aceste puncte trec dreptele distincte: AB, AM, BM, CM.

b) Se consideră punctele A, B, C, D astfel încât dreptele AB și CD să fie paralele. Să se determine dreptele determinate de aceste puncte.

Soluție.



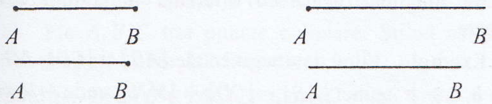
Dreptele sunt: AB, CD, AC, BD, AD și BC.

1.3 Segmentul de dreaptă

1. **Segmentul de dreaptă** reprezintă porțiunea dintr-o dreaptă cuprinsă între două puncte A și B ale dreptei, numite extremitățile segmentului.

Segmentul se notează:
$[AB]$ - caz în care conține toate punctele de pe dreaptă cuprinse între A și B, inclusiv A și B;
(AB) - caz în care conține toate punctele de pe dreaptă cuprinse între A și B, fără să conțină punctele A și B;
$[AB)$ - caz în care conține toate punctele de pe dreaptă cuprinse între A și B, inclusiv punctul A , și nu conține punctul B;
$(AB]$ - caz în care conține toate punctele de pe dreaptă cuprinse între A și B, inclusiv punctul B și nu conține punctul A.

Exemple.



Segmentul $[AA]$ se numește segmentul **nul**.

2. **Lungimea** unui segment de dreaptă $[AB]$ reprezintă distanța dintre punctele A și B, exprimată într-o unitate de măsură, se notează AB și se măsoară cu rigla.

3. **Unitatea principală** pentru măsurarea **lungimii** este metrul, care se va nota m.

Multiplii metrului sunt: dam = 10m, hm=100m, km=1000m.

Submultiplii metrului sunt: dm, cm, mm și avem :
1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm.

Segmentul de dreaptă se poate construi cu ajutorul riglei.

4. Două segmente $[AB]$ și $[CD]$ sunt **congruente**, dacă au lungimi egale și notăm $[AB] \equiv [CD]$.

Relația de congruență a segmentelor are următoarele proprietăți și este atunci **relație de echivalență**:

a) este reflexivă: $[AB] \equiv [AB]$;

b) este simetrică: dacă $[AB] \equiv [CD]$, atunci $[CD] \equiv [AB]$;

c) este tranzitivă: dacă $[AB] \equiv [CD]$ și $[CD] \equiv [EF]$, atunci $[AB] \equiv [EF]$.

Mijlocul unui segment $[AB]$ este punctul M, care împarte segmentul $[AB]$ în două segmente congruente ($[AM] \equiv [MB]$).

5. Fiind date segmentele $[AB]$ și $[CD]$, numim **segmentul sumă** al celor două segmente, segmentul $[MN]$, care are lungimea egală cu suma lungimilor celor două segmente.

Exemplu. Fiind date segmentele $[AB]$ și $[CD]$, $AB = a$ și $CD = b$, atunci $[AB] + [CD] = [MN]$, unde $MN = a + b$.

6. Fiind date segmentele $[AB]$ și $[CD]$, $AB > CD$, numim **segmentul diferență** al celor două segmente, segmentul $[MN]$, care are lungimea egală cu diferența lungimilor celor două segmente.

Exemplu. Fiind date segmentele $[AB]$ și $[CD]$, $AB = a$ și $CD = b, a > b$, atunci $[AB] - [CD] = [MN]$, unde $MN = a - b$.

7. Fiind date segmentele $[AB]$ și $[CD]$, vom construi **segmentul sumă** al celor două segmente astfel: pe dreapta suport a segmentului $[AB]$ (de exemplu), în prelungirea lui $[AB]$ construim un segment $[BE]$, astfel încât $BE = CD$. Atunci segmentul sumă este segmentul $[AE]$, deoarece $AE = AB + BE = AB + CD$.

8. Fiind date segmentele $[AB]$ și $[CD]$, $AB > CD$, vom construi **segmentul diferență** al celor două segmente $[AB] - [CD]$ astfel: pe dreapta suport a segmentului $[AB]$ se ia segmentul $[AE]$, astfel încât $AE = CD$. Atunci segmentul diferență este segmentul $[EB]$, deoarece $EB = AB - CD$.

9. **Aplicații**

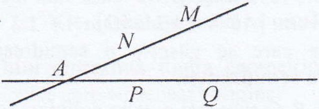
a) Desenați două segmente de dreaptă distincte și care să aibă cel puțin două puncte comune.

Soluție.

Segmentele $[AB]$ și $[AC]$ au ca puncte comune toate punctele segmentului $[AB]$, deci cel puțin două.

b) Desenați două drepte a și b, care se intersectează în punctul A. Luați punctele distincte $M, N \in a$ și $P, Q \in b$, astfel încât $A \notin \{M, N\}$ și $A \notin \{P, Q\}$. Stabiliți toate segmentele de dreaptă determinate de punctele M, N, P, Q.

Soluție.



Segmentele de dreaptă determinate de punctele M, N, P, Q sunt: $[MN], [MP], [MQ], [NP], [NQ], [PQ]$.

c) Fie A, B, C trei puncte coliniare. Știind că $AB = a$ și $BC = b$, să se calculeze AC. Discuție.

Soluție. Dacă $B \in [AC]$, atunci $AC = AB + BC = a + b$.
Dacă $A \in [BC]$, atunci $AC = BC - BA = b - a$.
Dacă C$\in [AB]$, atunci $AC = AB - CB = a - b$.

d) Fie A, B, C trei puncte coliniare în această ordine. Fie M mijlocul lui $[AB]$, N mijlocul lui $[BC]$ și P mijlocul lui $[AC]$. Să se demonstreze relațiile:

1) $MN = \frac{AC}{2}$; 2) $MP = \frac{BC}{2}$; 3) $NP = \frac{AB}{2}$.

Soluție.

$$MN = BM + BN = \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} = \frac{AB + BC}{2} = \frac{AC}{2}.$$

$$MP = AP - AM = \frac{AC}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{AC - AB}{2} = \frac{BC}{2}.$$

$$NP = PC - NC = \frac{AC}{2} - \frac{BC}{2} = \frac{AC - BC}{2} = \frac{AB}{2}.$$